Библиотека журнала
«Исследователь/Researcher»

В.И. Борзенко, Ю.А. Музланов
И.В. Лобов, В.М. Хайтов

# Исследование в математике и математика в исследовании

Методический сборник по исследовательской деятельности учащихся

Под редакцией А. С. Обухова

Национальный книжный центр

Москва, 2017

**ББК 74.202.5**
**Б82**

**Авторы:**
*Борзенко В.И.*, кандидат технических наук, учитель математики ГБОУ города Москвы «Лицей № 1553 им. В.И. Вернадского»;
Музланов Ю.А., преподаватель экологии кафедры Управления подразделениями Рязанского высшего воздушно-десантного командного училища имени В.Ф. Маргелова (военный институт), преподаватель Рязанского медико-социального колледжа, Заслуженный учитель Российской Федерации;
*Лобов И.В.*, кандидат биологических наук, доцент Кафедры биологии и методики ее преподавания Рязанского государственного университета им. С.А. Есенина;
*Хайтов В.М.*, кандидат биологических наук, заведующий Лабораторией экологии морского бентоса (гидробиологии) Санкт-Петербургского городского Дворца творчества юных

**Борзенко В.И., Музланов Ю.А., Лобов И.В., Хайтов В.М.**
Б82 Исследование в математике и математика в исследовании: Методический сборник по исследовательской деятельности учащихся / Под ред. А.С. Обухов – М.: Национальный книжный центр, 2017. – 160 с. (Библиотека журнала «Исследователь/Researcher».)
ISBN 978–5–4441–0179–7

В сборнике представлены методические разработки, применимые в организации исследовательской деятельности учащихся. Первая часть сборника посвящена применению исследовательского подхода в обучении математике. Каждая нестандартная математическая задача – это, безусловно, задача творческая и исследовательская. Более того, математические задачи служат, в определенном смысле, эталоном для исследовательских задач, возникающих в самых разнообразных областях науки и жизни, поэтому советы педагогу, выступающему в роли руководителя и помощника при решении школьниками математических задач, имеют достаточно универсальное значение. Представленный материал базируется на разработках выдающегося педагога и математика Д. Пойа.

Вторая часть сборника посвящена применению математических методов в исследованиях учащихся в области экологии и биологии. Обсуждается, как математика может применяться в биологии; какие типы численных данных могут быть в биологии, какие типы математических задач существуют в биологических исследованиях школьников, каковы принципы сбора материала. Даны некоторые правила чтения математических формул. Обсуждаются вопросы: что такое варьирование биологических признаков, что такое вероятность, каковы принципы обработки выборок, что такое статистическая достоверность. Описываются методы сравнения двух величин, методы анализа структуры популяции, методы описания взаимосвязи величин и методы многомерного анализа. Представлены статистические таблицы и аннотация дополнительной литературы.

Книга адресована заместителям директоров школ по научно-исследовательской деятельности, методистам, учителям математики, биологии, экологии, педагогам дополнительного образования детей.

ББК 74.202.5



ISBN 978–5–4441–0179–7

# Содержание

# «Исследовательский» подход к преподаванию математики: рекомендации для учителей по мотивам работ Д. Пойа

БОРЗЕНКО Владимир Игоревич, *кандидат технических наук, учитель математики лицея № 1553 им. В.И. Вернадского*

*Каждая нестандартная математическая задача — это, безусловно, задача творческая и исследовательская. Более того, математические задачи служат, в определенном смысле, эталоном для исследовательских задач, возникающих в самых разнообразных областях науки и жизни. Поэтому советы педагогу, выступающему в роли руководителя и помощника при решении школьниками математических задач, имеют достаточно универсальное значение. Представленный материал базируется на разработках выдающегося педагога и математика Д. Пойа.*



Как и любому педагогу, учителю математики предоставляются большие возможности, сопряженные с серьезной ответственностью. Если он заполнит время натаскиванием учащихся в области решения шаблонных упражнений, то он, скорее всего, убьет их интерес и затормозит развитие. Если же учитель попытается пробудить интерес школьников, предлагая им задачи, соразмерные их знаниям и способностям, помогая им при этом продуманными наводящими вопросами, то он, возможно, сумеет привить своим подопечным вкус к самостоятельному мышлению и развить необходимые для этого навыки.

Разумеется, ученик должен приобрести максимальный опыт самостоятельной работы. Но зачастую, если он окажется один на один с задачей безо всякой помощи или если эта помощь будет некорректной, пользы не будет никакой. Если помощь учителя чрезмерна, то что же остается на долю ученика? Учитель должен уметь помогать не слишком много и не слишком мало— так, чтобы ребенку оставалась оптимальная в педагогическом смысле часть работы.

Хороший учитель может поставить себя на место школьника, увидеть источник затруднений, постараться понять, что происходит в его голове, и задать вопрос или подсказать, в каком направлении можно сделать шаг. ***В этом и заключается одна из важнейших составляющих искусства обучения.***

Стремясь оказать младшему коллеге оптимальную помощь, учитель оказывается перед необходимостью вновь и вновь задавать одни и те же вопросы и подсказывать более или менее одни и те же шаги. Так, при решении бесчисленного множества задач нам приходится задавать вопросы: что требуется, что надо найти, что представляет собой неизвестное? Разные по форме, по существу эти вопросы призваны инициировать один и тот же умственный процесс.

Выдающийся педагог и математик Д. Пойа в своих книгах подробно описал те приемы и мыслительные процессы, которые в том или ином виде присутствуют при решении едва ли не любой исследовательской задачи, в том числе математической. Наша скромная цель — вкратце изложить его основные идеи, преломляя их сквозь призму собственного опыта. По нашему мнению, следуя изложенным далее методическим рекомендациям, учитель в максимальной мере может поспособствовать развитию ***исследовательского мышления*** учащихся.

## НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Итак, начнем с самых общих вопросов: «Что требуется найти, что дано, в чем состоит условие задачи?» Само собой разумеется, что вопросы и советы ученику должны быть естественны, просты, при их формулировании нужно исходить из здравого смысла. Возьмем, например, совет: «Рассмотрите искомое! Постарайтесь вспомнить знакомую задачу с тем же или подобным неизвестным. Иначе говоря, попытайтесь действовать по аналогии».

Существуют две основные цели, которые учитель должен иметь в виду, обращаясь к ученикам с вопросом или советом:

1) помочь ученику решить данную конкретную задачу;
2) развить способности ребенка таким образом, чтобы в будущем он смог решать более или менее похожие задачи самостоятельно.

Эти две цели тесно связаны между собой. Так, ясно, что справившись с данной задачей, школьник развивает свои навыки решения задач вообще. Если один и тот же вопрос многократно приносит пользу, то ученик, вероятно, заметит это. Задавая себе этот вопрос вновь и вновь, он сможет рано или поздно освоить соответствующую идею.

***Умение решать задачи — это искусство, приобретаемое практикой***. В конце концов, мы овладеваем любым мастерством при помощи подражания и опыта, хотя часто приходится искать принципиально новые пути. Учась решать задачи, мы должны наблюдать за коллегами и подражать им в том, как они это делают, а затем — шаг за шагом — овладевать этим искусством при помощи упражнения.

Учитель, стремящийся развить способности учеников решать задачи определенного типа, должен пробудить в них хотя бы некоторый интерес к подобным заданиям. Что же касается решения задачи перед аудиторией, то полезно излагать свои мысли немного театрально, ставя перед собой те же самые вопросы, которые предлагаются ученикам. Опыт позволяет нам надеяться, что руководимый подобным образом ученик рано или поздно овладеет эффективным применением этих вопросов и советов и тем самым приобретет нечто более ценное, чем запоминание какого-либо частного математического факта или приема.

Пытаясь найти решение, мы можем многократно менять свой взгляд на задачу. Наша позиция должна быть гибкой. Поэтому представление о задаче закономерно меняется по мере работы над нею. Вслед за Д. Пойа мы будем различать четыре ступени в процессе решения задачи:

1) знакомимся и понимаем задачу, то есть стремимся ясно увидеть, что в ней является данным, а что — искомым;
2) находим связи, то есть стремимся понять, как связаны друг с другом различные элементы задачи, как неизвестное связано с данными. Это необходимо, чтобы получить общее представление о возможном ходе решения и составить предварительный план;
3) осуществляем наш план;
4) анализируем найденное решение.

Каждая из этих ступеней важна сама по себе. Случается так, что учащийся, озаренный блестящей идеей, «перепрыгивает» через все приготовления и сразу находит путь решения. Однако будет плохо, если ученик пропустит даже одну из перечисленных четырех ступеней, не имея хорошей идеи, а уж тем более, если примется за вычисления и построения, толком не поняв задачи. Совершенно бесполезно браться за какие-либо частные рассмотрения, не прояснив главных связей, не составив себе хотя бы примерного плана.

Многих ошибок можно избежать и на следующем этапе, если, идя по плану, ученик проверяет каждый шаг. И, наконец, большая часть пользы от задачи может быть потеряна, если, рассматривая уже полученное решение, ученик не сможет или не удосужится должным образом проанализировать его.

Итак, ученик должен понять задачу. Но главное: он должен ***захотеть*** ее решить! И надо сказать, что если ученику не хватает понимания задачи или интереса к ней, то это не всегда его вина. Задачу нужно умело выбрать: она должна быть не слишком трудной и не слишком легкой, естественной и интересной. Иногда некоторое время нужно уделять ее интересной интерпретации.

Прежде всего, должна быть понята словесная формулировка. Учитель до некоторой степени может это проверить: он просит ученика повторить задачу, и тот должен быть в состоянии легко это сделать, а также указать и главные элементы задачи — искомое, данные, условие. Таким образом, преподаватель редко может обойтись без вопросов: что неизвестно, что дано, в чем состоит условие?

Затем ученик должен внимательно и с разных сторон рассмотреть главные элементы задачи. Если с условием связана какая-либо геометрическая фигура, то ему надо сделать чертеж и отметить на нем данные и неизвестное. Если требуется как-то называть эти объекты, он должен ввести подходящие обозначения. Заметим кстати, что, уделяя внимание подходящему выбору символов, ребенок волей-неволей сосредоточит свои мысли на объектах, для которых эти символы нужно подыскать.

Можно задать еще вопросы, которые могут оказаться полезными и на предварительной стадии (при условии, что мы не будем ждать окончательного ответа на него, а будем рассчитывать лишь на временный ответ, догадку): «Возможно ли удовлетворить условию? Определен ли ответ однозначно?»

## СОСТАВЛЕНИЕ ПЛАНА

У нас есть план, если нам известно хотя бы в общих чертах, какие вычисления или построения придется проделать, чтобы получить искомое.

Путь от понимания задачи до составления хотя бы примерного плана решения может быть долгим и извилистым. Собственно, главный шаг на пути к решению задачи и состоит в том, чтобы прийти к идее плана. Эта идея может проявляться постепенно. Или она может возникнуть вдруг, в один миг, после, казалось бы, безуспешных попыток и сомнений в возможности задачу решить. Тогда мы назовем ее «блестящей идеей», а способ ее появления в голове — инсайтом.

Лучшее, что может сделать учитель для ребенка на этом этапе, состоит в том, чтобы путем неназойливой помощи подвести его к блестящей идее, подготовить к инсайту. Вопросы и советы, которые мы предлагаем, как раз и предназначены для этого. Чтобы понять положение решающего задачу ученика, учитель должен вспомнить свой собственный опыт, свои трудности и успехи.

Мы знаем, конечно, что трудно рассчитывать на удачную идею, имея слабые познания в предмете. Хорошие идеи имеют своим источником осмысленный опыт и приобретенные знания. Конечно, для того, чтобы найти хорошую идею, одних «воспоминаний» мало. Но никакие хорошие идеи не появятся, если в нашей памяти не хранятся необходимые приемы и факты — материалы для решения задач. Эти «материалы» представляют собой релевантные (то есть имеющие отношение к задаче) крупицы прежде приобретенных математических знаний — такие, как решенные ранее задачи или доказанные теоремы. Поэтому часто оказывается уместным начать работу с вопроса: известна ли вам какая-нибудь родственная задача? Трудность здесь в том, что обычно оказывается слишком много задач, связанных в той или иной степени с той, что решается в данный момент (то есть имеющих с ней какие-либо общие черты). Как же выбрать то, что действительно будет полезно? Вот совет, указывающий нам ту из общих черт, которая может оказаться самой существенной: «Рассмотрите искомое! И постарайтесь вспомнить знакомую задачу с таким же или подобным искомым».

Нам повезло, если нам удалось вспомнить уже решенную задачу, достаточно тесно связанную с новой. Теперь постараемся использовать случай и извлечь все, что можно, из этой удачи: «Вот задача, сходная с данной и уже решенная. Нельзя ли воспользоваться ею?»

Эти вопросы, если их хорошо уяснить и глубоко продумать, часто помогают правильно направить ход мыслей. Но они не всегда в состоянии помочь. Если эти вопросы не помогают, то мы должны начать поиски новых подходящих точек соприкосновения с опытом, постараться исследовать все возможные аспекты нашей задачи, видоизменить, преобразовать ее: «Нельзя ли сформулировать задачу иначе?»

В нашем арсенале имеются специфические средства, чтобы изменить задачу: обобщение, специализация, использование аналогии, отбрасывание части условий и т.д. Видоизменение задачи может, в частности, привести к некоторой подходящей вспомогательной задаче: «Если не удается решить данную задачу, попытайтесь предварительно изучить сходную».

Увлекшись попытками использовать различные известные задачи и теоремы, рассматривая всевозможные модификации задачи, экспериментируя с разными вспомогательными задачами, мы можем оставить нашу первоначальную задачу так далеко, что возникнет опасность совсем уйти в сторону. Но следующие превосходные вопросы вернут нас к цели: «Все ли данные вы использовали? Все ли условия?»

Если учитель при самом внимательном наблюдении не может обнаружить никаких признаков инициативы, то он должен возобновить свой диалог с учащимися, тщательно взвешивая каждое свое слово. Он должен быть готов к тому, чтобы предлагать повторно (лишь в несколько измененном виде) вопросы, на которые ребята не могут сразу дать ответа. Он должен быть готов часто встречаться с обескураживающим молчанием подопечных.

## ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ПЛАНА

Нелегко выстроить план, найти идею решения. Для этого требуется многое: ранее приобретенные знания, интеллект, приученный к логическому мышлению, полная сосредоточенность и еще одно — удача. Осуществить же план решения гораздо легче, здесь нам потребуется главным образом терпение.

План указывает лишь общие контуры решения, теперь нам нужно убедиться, что все детали вписываются в эти общие контуры. Поэтому нужно терпеливо рассмотреть эти детали, одну за другой, пока все не станет совершенно ясным и не останется ни одного темного угла, в котором может скрываться ошибка.

Если учащийся разработал план решения, для учителя наступает сравнительно спокойное время. Главная проблема теперь в том, что учащийся может забыть свой план. Это легко может случиться, если ребенок получил план извне и, принимая его, положился на авторитет учителя. Но уж если ученик сам потрудился над составлением плана (хотя бы даже с некоторой помощью), и если он с законной радостью воспринял окончательную идею, то она не сможет от него легко ускользнуть. И все же учитель должен настаивать, чтобы учащийся ***проверял каждый свой шаг***.

Убедиться в правильности того или иного шага наших рассуждений мы можем либо интуитивно, либо логически. Мы можем сосредоточивать наше внимание на рассматриваемом утверждении до тех пор, пока оно не станет для нас столь ясным и отчетливым, что не останется никакого сомнения в правильности данного шага. Но мы можем поступить и иначе, выведя наше утверждение по логическим правилам.

Самое главное заключается в том, что учащийся должен быть по-настоящему убежден в правильности каждого шага. В некоторых случаях учитель может указать на разницу между «увидеть» и «доказать»: «Очевидно ли вам, что предпринятый шаг правилен? А в состоянии ли вы доказать, что он правилен?»

## АНАЛИЗ НАЙДЕННОГО РЕШЕНИЯ

Даже очень хорошие ученики, получив ответ и тщательно изложив ход решения, обычно закрывают тетрадь и переходят к другим делам. Поступая так, они лишают себя того важного и поучительного, что может дать последняя стадия работы. Оглядываясь назад на полученное решение, вновь рассматривая и анализируя результат и тот путь, которым они к нему пришли, они могут углубить свои знания и закрепить навыки, необходимые для решения задач. Хороший учитель обязан понимать, что никакую задачу нельзя исчерпать до конца. Эту мысль он должен прививать и своим ученикам. Всегда остается что-нибудь, над чем можно поразмышлять. Обладая достаточным упорством и проницательностью, мы можем усовершенствовать любое решение или, во всяком случае, всегда можем глубже осмыслить это решение.

Итак, учащийся реализовал свой план. Он записал решение, проверяя каждый свой шаг, и теперь имеет веские основания считать свое решение правильным. Тем не менее, ошибки всегда возможны, в особенности, если решение длинное и запутанное. Поэтому проверка его всегда желательна. Особенно важно не проглядеть какой-нибудь быстрый «интуитивный» способ проверки результата или хода решения: «Нельзя ли проверить результат? Нельзя ли проверить ход решения?»

Мы естественно предпочитаем убеждение, основанное на двух различных доказательствах: «Нельзя ли получить тот же результат иначе?» Нас, конечно, в большей мере устроит короткое интуитивное рассуждение, чем длинное и тяжеловесное: «Нельзя ли усмотреть результат с одного взгляда?»

Одна из главных обязанностей учителя состоит в том, чтобы не создать у учащихся впечатления, что математические задачи мало связаны одна с другой. Когда мы смотрим на решение задачи, нам предоставляется возможность исследовать, как эта задача связана с другими. В самом деле, бывает интересно снова окинуть взглядом решение, тем более, если учащиеся честно приложили усилия. Тогда им, возможно, захочется узнать — что еще они могут получить? Как сделать, чтобы их работа всегда была бы столь же плодотворной? Учитель должен поощрять ребят, придумывая случаи, к которым они могли бы применить использованный метод или полученные результаты: *«Нельзя ли использовать полученный результат или метод решения в какой-нибудь другой задаче»?*

Эти вопросы полезны с разных точек зрения. Во-первых, на сообразительного школьника производит впечатление тот факт, что полученная формула выдерживает многочисленные испытания. Он и ранее был убежден, что формула верна, так как тщательно проверил ее вывод. Но теперь он убеждается в этом в значительно большей степени, причем его убеждение имеет совершенно другой источник, а именно: нечто вроде «экспериментальной очевидности». Затем, благодаря вышеприведенным вопросам, детали формулы приобретают новый смысл и сопоставляются с разнообразными фактами. Поэтому возрастает вероятность того, что формула не будет забыта. Наконец, эти вопросы легко могут быть переформулированы применительно к аналогичным задачам.

Приобретя некоторый опыт в решении подобных задач, сообразительный ученик воспримет ***общие идеи***, лежащие в основе рассмотренных вопросов: использование всех существенных данных, изменение данных, симметрию, аналогию. А если он приобретет привычку проводить всякий раз исследование в этих направлениях, то это будет означать существенный шаг вперед в овладении искусством решения задач.

## МЕТОДИКА ЗАДАВАНИЯ ВОПРОСОВ

Начинайте с общего вопроса или совета, затем, если необходимо, «спускайтесь» к более частным и конкретным, пока не дойдете до вопроса, соответствующего уровню развития учащегося.

Если вы хотите помочь ребенку реализовать его идею, начните снова с общего вопроса, затем, если нужно, перейдите к более частному и т.д.

Советы должны быть простыми и естественными — иначе они будут *навязчивыми*.

Они должны быть общими, применимыми не только к данной задаче, но и к другим, поскольку главная цель их задавания — развитие *общих эвристических способностей* учащегося, а не просто какого-нибудь частного технического навыка.

Желательно, чтобы предлагаемые вопросы повторялись достаточно часто, причем применяться они должны ненавязчиво, в разнообразных ситуациях. Тогда, вероятно, в конце концов они будут усвоены учащимся, и такая форма работы станет *привычной функцией его ума*.

И еще важный момент: необходимо переходить к более частным советам *постепенно*, чтобы учащемуся доставалась *максимально возможная часть работы*.

Описанный метод задавания вопросов не есть нечто незыблемое, методу присуща известная гибкость; он допускает различные подходы к задаче, но должен применяться так, чтобы вопросы учителя *могли бы прийти в голову и самому учащемуся*.

Если учитель пожелает испытать предложенный здесь метод в своем классе, он должен будет, конечно, действовать осторожно. Необходимо тщательно подготовить примеры для рассмотрения, обязательно предусмотрев различные подходы к ним.

Начать следует с нескольких проб, чтобы выяснить, как он сам владеет методом, как учащиеся воспринимают этот метод и как много времени на уходит на работу.

## ПРИМЕР

**Задача на построение.** *Вписать квадрат в данный треугольник так, чтобы две вершины квадрата принадлежали основанию, а каждая из двух остальных — одной из боковых сторон треугольника.*

— *Что неизвестно?*

— Квадрат.

— *Что дано?*

— Только треугольник, больше ничего.

— *В чем состоит условие?*

— Четыре вершины квадрата должны лежать на периметре треугольника, две вершины — на основании, и по одной на каждой из боковых сторон.

— *Возможно ли удовлетворить условию?*

— Наверное, да. Но точно я не знаю.

— *Вероятно, задача не кажется вам чересчур легкой. Если не удается решить данную задачу, попытайтесь сначала решить сходную. Можно ли удовлетворить части условий?*

— А что значит «часть условий»?

— *Посмотрите-ка, условие касается всех вершин квадрата. Сколько всего вершин у квадрата?*

— Четыре.

— *Часть условий должна касаться не всех четырех вершин, а меньшего числа вершин. Сохраните только часть условий, отбросив остальные. Какой части условий легко удовлетворить?*

— Легко начертить квадрат с двумя вершинами на периметре треугольника или даже с тремя вершинами на периметре!

— *Сделайте чертеж!*

(Учащийся чертит.)

— *Вы сохранили только часть условий и отбросили остальные. Насколько определенным осталось теперь неизвестное?*

— Квадрат не определен, если только три его вершины лежат на периметре треугольника.

— *Очень хорошо! Сделайте чертеж!*

(Учащийся чертит еще квадрат.)

— *Квадрат, как вы сказали, не определен той частью условий, которую вы сохранили. Как он может меняться?*

. . . . . .?

— *Три вершины вашего квадрата лежат на периметре треугольника, но четвертая вершина пока не там, где она должна быть. Квадрат, как вы сказали, не определен, он может меняться; поэтому его четвертая вершина может перемещаться. Как она может перемещаться?*

. . . . . .?

— *Поэкспериментируйте, если угодно. Постройте еще несколько квадратов с тремя вершинами на периметре, как у тех двух, которые* *уже начерчены. Начертите маленькие и большие квадраты. Каково геометрическое место четвертых вершин квадратов? Как перемещается четвертая вершина, когда меняется квадрат?*

Учитель подвел учащегося вплотную к идее решения. Если учащийся в состоянии догадаться, что геометрическое место четвертых вершин есть прямая, то решение у него в руках.

## ВИДОИЗМЕНЕНИЕ ЗАДАЧИ

Человек умеет, во всяком случае должен уметь, менять свой подход при решении задач, исследовать различные возможности с большим вниманием. Мы должны уметь учиться на своих ошибках.

...Насекомое старается вылететь через оконное стекло и повторяет эту безнадежную затею снова и снова. Оно не пытается вылететь в окно, расположенное рядом. Мышь действует более разумно: попав в клетку, она пытается протиснуться между одними прутьями решетки, затем между другими и т.д. Она варьирует свои попытки, исследует различные варианты...

«Пытайся, пытайся снова» — это мудрый совет. И насекомое, и мышь, и человек следуют ему, но если у кого-то это получается более успешно, то лишь потому, что он *видоизменяет варианты решения проблемы (задачи)* более разумно.

Желая перейти от нашего первоначального представления о задаче к более полному, мы рассматриваем ее с разных точек зрения. Успех решения зависит от выбора подхода, от того, атакуем ли мы крепость с доступной стороны. Чтобы выяснить, какой путь более правильный, какая сторона более доступна, мы рассматриваем задачу с разных точек зрения, подходим с разных сторон, мы *видоизменяем* задачу.

Видоизменение задачи существенно. Этот факт имеет различные объяснения. Почему? А как вообще происходит продвижение в решении задачи? Оно проявляется, в частности, в ***структурировании*** и ***активизации*** ранее усвоенных знаний: ведь вынуждены же мы припомнить ряд необходимых для решения задачи элементов и ввести их в рассмотрение. Решая задачу, мы как бы пробуждаем и перестраиваем полки с нашими знаниями для штурма данной конкретной крепости. Варьирование задачи помогает нам припомнить подходящие элементы наших знаний и опыта. Каким образом? С помощью своего рода «действий по связям» — ассоциаций. То, что занимает наши мысли в данный момент, имеет возможность вызвать в нашей памяти все, что было связано с этим раньше. *Видоизменяя задачу*, мы вносим новые моменты, создаем новые связи, получаем новые шансы воскресить в нашей памяти все, что имеет отношение к делу.

Серьезную задачу нельзя надеяться решить без большого напряжения. Но от сосредоточения внимания на одном предмете быстро наступает усталость. ***Чтобы удержать внимание, предмет, на который оно направлено, должен постоянно меняться.*** Если работа продвигается успешно, то у нас есть чем заниматься: приходится рассматривать новые моменты. Наше внимание занято, и интерес к работе поддерживается. Но если достичь успеха не удается, то интерес падает, внимание рассеивается, мы устаем, мысли начинают разбегаться, и есть опасность, что мы совсем упустим задачу. Чтобы избежать этого, мы должны *поставить себе какой-либо новый вопрос,* связанный с объектом нашего внимания.

Новый вопрос может раскрыть перед нами неиспробованные возможности — возможности создания связей с ранее приобретенными знаниями, вселить надежду на установление новых ассоциаций. *Новый* вопрос может вновь пробудить наш интерес, он *видоизменяет задачу* и тем самым выявляет *новые* ее стороны.

Мы должны варьировать задачу, находить различные формулировки до тех пор, пока наконец не удастся отыскать что-нибудь полезное. Даже неудача может нас кое-чему научить: в ней может быть скрыта хорошая идея, и мы можем прийти к более удачному варианту, *видоизменяя неудачный*. Опыт показывает, что после ряда попыток мы очень часто приходим к доступной вспомогательной задаче.

Имеется ряд известных способов варьирования задачи. Как правило, они приносят пользу. К ним принадлежат, например, такие приемы, как:

1) возвращение к *определениям*;
2) *разложение и составление новых комбинаций*;
3) введение *вспомогательных элементов*;
4) *обобщение;*
5) *специализация*;
6) использование *аналогии.*

## ДОСТАТОЧНО ЛИ ДАННЫХ? НЕ ИЗБЫТОЧНЫ ЛИ ОНИ?

Полезно заранее сформулировать какую-нибудь характерную особенность результата, которого мы добиваемся. Когда у нас есть некоторое представление об окончательном результате, мы лучше знаем, в каком направлении следует работать. В частности, важной характеристикой задачи является количество ее возможных решений. Сколько их может быть? Если нам удастся ответить на данный вопрос хотя бы правдоподобной догадкой, то наш интерес к процессу поиска ответа возрастет, и мы сможем работать лучше. Этот вопрос полезен на ранней стадии работы в том случае, если мы сможем ответить на него достаточно легко. Если же получить ответ трудно, то усилия, затраченные на его поиск, оправданы не будут, ибо они превысят выигрыш в интересе. То же самое относится к вопросу: «Возможно ли удовлетворить условию?» — и другим вопросам того же рода. Их следует ставить, так как не исключено, что ответить на них будет легко и ответ покажется правдоподобным. Однако не следует уделять им очень много времени, если ответ получить трудно или же он недостаточно ясен.

Соответствующие вопросы для «задач на доказательство» таковы: «Вероятно ли, что теорема верна? Или похоже, что она неверна?» Сама постановка вопроса явно указывает на то, что мы ожидаем здесь лишь догадку, правдоподобный предварительный ответ.

## ЗАДАЧА, РОДСТВЕННАЯ ДАННОЙ И УЖЕ РЕШЕННАЯ

Мы, безусловно, должны быть довольны, вспомнив задачу, решенную прежде и связанную с нашей теперешней задачей. Еще более приятно, если связь эта окажется тесной, а решение простым. Рассматриваемая ситуация типична и очень важна. Чтобы ясно себе ее представить, сравним ее с другой, а именно с такой, которая возникает, когда мы переключились на какую-либо вспомогательную задачу. В обоих случаях цель у нас одна. Она заключается в том, чтобы найти решение некоторой задачи *A*, но для этого мы вводим и рассматриваем другую задачу — *B*, надеясь извлечь из нее определенную пользу.

Разница же состоит в нашем отношении к задаче *B*. В рассматриваемом случае нам удалось *вспомнить* прежнюю задачу *B*; мы *знаем* ее решение, но не знаем пока, как его использовать. В другом случае нам удалось *придумать* новую задачу *B*; *мы знаем, как ее использовать* (или предполагаем с большой вероятностью), но не знаем пока ее решения.

Таким образом, всю разницу между обеими ситуациями составляет *характер наших затруднений* в отношении задачи *B*. Преодолев эти затруднения, мы оказываемся в состоянии использовать задачу *B* в обоих случаях: мы можем применить результат задачи *B*, или же метод ее решения, или, если нам особенно повезло, и то и другое.

Итак, в рассматриваемой здесь ситуации мы прекрасно знаем, как решается задача *B*, но мы не знаем, как из этого извлечь пользу. Поэтому мы спрашиваем себя: «Нельзя ли воспользоваться ею? Нельзя ли применить ее результат? Нельзя ли использовать метод ее решения?»

Наше намерение использовать ранее решенную задачу оказывает определенное воздействие на то, как мы воспринимаем и осмыс-